LOGIKAI ALAPOK A PROGRAMOZÁSHOZ

Verzió: 1/2008-06-17

1. Definíciók

1.1. **Mit értünk Gondolkodásforma vagy következtetésforma alatt és mit értünk helyes gondolkodásforma vagy következtetésforma alatt?** Gondolkodásforma vagy következtetésforma egy $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ állításhalmaz és egy A állításból álló (F, A) pár. Helyes következtetésforma egy (F, A) pár, ha minden olyan esetben, amikor az F-ben minden állítás igaz, a következmény állítás is igaz.

1.2. **Definiálja a logikai függvény – reláció a matematikai függvény – művelet fogalmakat!** Függvénynek nevezünk egy $D \to R$ leképzést. D tetszőleges U vagy U^n. $R = \{h, i\}$ vagy $R = \{i, h\}$. A matematikai függvény olyan $D \to R$ leképzés, ahol $D = R^n$, és $n = 1, 2, \ldots, k$ véges érték.

1.3. **Definiálja (ítéletlogikában és elsőrendű logikában) a részformula és a közvetlen részformula fogalmakat!** Egy formula részformulája a benne előforduló olyan összefüggő jelsorozat, amely maga is ítéletlogikai formula. Közvetlen részformula: legszűkebb részformula vagy a logikai művelet hatásköre. $\neg A$ közvetlen részformulája A. Az $(A \circ B)$ közvetlen részformulái az A és a B.

1.4. **Adja meg ítéletlogikában a formula rekurzív definícióját! (Szintaxis).**

(1) alaplépés: minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (prímformula)
(2) rekurziós lépés:
  (a) Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ is az.
  (b) Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $(A \circ B)$ is ítéletlogikai formula. „$\circ$” a három binér művelet bármelyike.
(3) Minden ítéletlogikai formula az 1. és 2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

1.5. **Adja meg elsőrendű logikában a formula rekurzív definícióját! (Szintaxis).**

(1) alaplépés: Ha a $P \in Pr(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ fajtájú predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ formula. Atomi formula.
(2) rekurziós lépés:
  (a) Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ is az.
  (b) Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $(A \circ B)$ is ítéletlogikai formula. „$\circ$” a három binér művelet bármelyike.
(3) Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.

(4) Minden ítéletlogikai formula az 1., 2. és 3. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

1.6. **Adja meg elsőrendű logikában a term rekurzív definícióját! (Szintaxis).**

(1) alaplépés: minden $\pi \in Srt$ fajtájú individuumváltozó és konstans szimbólum π fajtájú term.
(2) rekurziós lépés: Ha az $f \in Fn(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ függvényszimbólum és és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ π_f fajtájú term.
(3) Minden ítéletlogikai formula az 1. és 2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

1.7. **Mi egy logikai művelet hatásköre?** A formula részformulái közül az a legkisebb logikai összetettségű, amelyben az adott logikai összekötőjel előfordul,

1.8. **Mi egy formula fő logikai összekötőjele?** Az az összekötőjel, amelynek hatásköre maga a formula.

1.9. **Definiálja ítéletlogikában a bázis és az n-változós szemantikus fa fogalmát.** *Bázis:* A formulában szereplő ítéletváltozók sorrendjét bázisnak nevezzük. Egy *n-változós szemantikus fa* egy n-szintű bináris fa, ahol a szintek a bázisbeli változóknak felelnek meg. Egy X változó szintjén a csúcsokból kiinduló élpárokhoz az X, $\neg X$ címkéket rendejük. Egy n-szintű szemantikus fa ágain az összes (2^n db) igazságkiértékelés megjelenik.

1.10. **Mi egy n-változós formula igazságtáblája?** Egy $2^n + 1$ sorból és *n+1* oszlopból álló táblázat, ahol a fejlécben a bázis és a formula szerepel. A sorokban a változók alatt az interpretációk, a formula alatt az adott interpretációban lévő helyettesítési értéke található.

1.11. **Mi egy formula igazhalmaza és hamishalmaza?** Egy formula *igazhalmaza* azon I interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke igaz. Egy formula *hamishalmaza* azon I interpretációk halmaza, amelyekre a formula helyettesítési értéke hamis.

1.12. **Legyen $B_I(A)$ az A formula helyettesítési értéke az I interpretációban. Mikor mondjuk, hogy az ítéletlogikában egy I interpretáció kielégít egy A formulát ($I \vDash_0 A$)?** Akkor, ha a formula helyettesítési értéke *igaz* az interpretációban.

1.13. **Mit jelent az, hogy egy ítéletlogikai formula kielégíthető?** Egy formula kielégíthető, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

1.14. **Mit jelent az, hogy egy ítéletlogikai formula kielégíthetetlen?** Egy formula kielégíthetetlen, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

1.15. **Mit jelent az, hogy egy ítéletlogikai formula tautologia vagy logikai törvény?** Egy formula tautologia, ha minden interpretáció kielégíti.

1.16. **Legyen $B_I(A)$ az $\boldsymbol{A}$ formula helyettesítési értéke az $\boldsymbol{I}$ interpretációban és legyen $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ egy formulahalmaz. Mikor mondjuk, hogy az ítéletlogikában egy I interpretáció kielégít egy $\boldsymbol{F}$ formulahalmazt ($I \vDash_0 A$)?** Kielégíti az interpretáció az F formulahalmazt, ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke *igaz* az interpretációban.

1.17. **Mit jelent az, hogy egy ítéletlogikai formulahalmaz kielégíthető?** Egy F formulahalmaz kielégíthető, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

1.18. **Mit jelent az, hogy egy ítéletlogikai formulahalmaz kielégíthetetlen?** Egy F formulahalmaz kielégíthetetlen, ha bármely interpretációban legalább egy formulája hamis. Azaz nincs olyan interpretáció, ami kielégítené.

1.19. **Mit jelent az, hogy két ítéletlogikai formula tautologikusan ekvivalens?** Két formula tautologikusan ekvivalens, ha igazságtáblájuk azonos. Jelölés: $\sim_0$.

1.20. **Mit jelent az, hogy egy G formula az $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaznak tautologikus következménye ($\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vDash_0 G$)?** Azt, hogy minden olyan I interpretációra, amire $I \vDash_0 \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ fennál, $I \vDash_0 G$ is fennál.

1.21. **Mi egy elsőrendű formula értéktáblája (fejléc, prímkomponens stb.)? (Quine táblázat).** Egy elsőrendű formula értéktáblájában az első sorba a formula szabad változói, a primkomponensek és a formula kerülnek. (Mivel a primformulák több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az individuumváltozók kiértékelése után válnak állításokká.) Az individuum változók alá a lehetséges változókiértékelések, a primformulák alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a formulának a prímformulák értékei alapján kiszámított helyettesítési értékei találhatók.

1.22. **Legyen A^{I_k} az $\boldsymbol{A}$ formula helyettesítési értéke az $\boldsymbol{I}$ interpretációban (interpretáló strukturában). Mikor mondjuk, hogy az elsőrendű logikában egy I_k interpretáció kielégít egy $\boldsymbol{A}$ formulát ($I_k \vDash_0 A$). Mi a k? Mi az $\boldsymbol{I}$?.** Az L egy I_k interpetációja kielégít egy elsőrendű A formulát, ha a formula $|A|^I$ értéke igaz. Ha az A formula mondat és $I_k \vDash A$, akkor azt mondjuk, hogy az S struktúra elégíti ki az A-t, így $S \vDash A$. Más szóval S modellje A-nak.

1.23. **Mit jelent az, hogy egy elsőrendűlogikai formula kielégíthető?** Azt mondjuk, hogy egy G formula kielégíthető, ha az L-hez van legalább egy I interpretáció, hogy $I \vDash G$.

1.24. **Mit jelent az, hogy egy elsőrendűlogikai formula kielégíthetetlen?** Azt mondjuk, hogy egy G formula kielégíthetetlen, ha az L-hez nincs olyan I interpretáció, hogy $I \vDash G$.

1.25. **Mit jelent az, hogy egy elsőrendű logikai formula tautologia vagy logikai törvény?** Azt mondjuk, hogy egy G formula tautologia, ha G értéktáblájában a prímkomponensekhez rendelhető összes lehetséges igazságérték hozzárendelés esetén a formula helyettesítési értéke igaz.

1.26. **Legyen A^{I_k} az $\boldsymbol{A}$ formula helyettesítési értéke az $\boldsymbol{I}$ interpretációban és legyen $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ egy formulahalmaz. Mikor mondjuk, hogy az elsőrendű logikában egy $\boldsymbol{I}$ interpretáció kielégít egy $\boldsymbol{F}$ formulahalmazt ($I \vDash_0 F$)?** Ha L egy I interpretációjára az $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmazban $|F_k|^i$ értéke igaz minden $1 \leq k \leq n$-re, akkor I kielégíti F-et. Jelölés: $I \vDash F$.

1.27. **Mit jelent az, hogy egy elsőrendű logikai formulahalmaz kielégíthető?** Azt mondjuk, hogy F formulahalmaz kielégíthető ha L-nek legalább egy I interpretációja kielégíti, azaz $I \vDash F$.

1.28. **Mit jelent az, hogy egy elsőrendű logikai formulahalmaz kielégíthetetlen?** Az F formulahalmaz kielégíthetetlen, ha az F közös értéktáblájában minden sorban van legalább egy olyan eleme F-nek, amelynek a helyettesítési értéke hamis.

1.29. **Mit jelent az, hogy két elsőrendűlogikai formula elsőrendben ekvivalens?** Az A és B elsőrendű formulák logikailak ekvivalensek, ha $A \vDash B$ és $B \vDash A$.

1.30. **Mit jelent az, hogy egy $\boldsymbol{G}$ formula az $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaznak logikai következménye ($\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vDash G$)?**

$$\vDash F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (F_{n-1} \rightarrow (F_n \rightarrow G))\,...))$$

Azaz $F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (F_{n-1} \rightarrow (F_n \rightarrow G))\,...))$ igaz.

1.31. **Mit értünk matematikai struktúra alatt és mit annak szignatúráján?** Matematikai struktúra egy $\langle U, R, M, K\rangle$ együttes, ahol:

- U: nem üres halmaz, a struktúra értelmezési tartománya
- R: U-n értelmezett n-változós logikai függvények halmaza
- M: U-n értelmezett n-változós matematikai függvények halmaza
- K: az U megjelelölt elemeinek egy (esetleg üres) részhalmaza.

A struktúra szignatúrája megadja az alaprelációk és az alapműveletek aritását valamint K elemszámát.

1.32. **Mi az elsőrendű L nyelv ábécéje, és szignatúrája?** Az L nyelv ábécéje: $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst\rangle$. Srt egy nemüres halmaz melynek π_j elemei fajtákat szimbolizálnak. Pr a predikátumszimbólumok halmaza. $v_1, P \in Pr$-re megadja P aritását (k) és, hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k)$. Fn a függvényszimbólumok halmaza. v_2 megadja f aritását (k) és, hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok valamint a függvény értéke $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k; \pi_f)$. Cnst a konstansszimbólumok halmaza, v_3 megadja konstansok számát és minden konstanshoz annak fajtáját.

1.33. **Mit jelent az alapkifejezés? Mi az alapterm, alapformula, alapatom, atomi formula alappéldánya?** Alapkifejezés a változót nem tartalmazó L kifejezés (alapformula, alapterm). Ezeket alappéldányoknak is nevezik. Az atomi formulák alappéldányait két csoportba soroljuk.

(1) Egy atomi formula alapatom, ha argumentumai konstans szimbólumok vagy egy megadott univerzum elemei
(2) Egy atomi formulát az atomi formula alappéldányának nevezzük, ha argumentumai alaptermek.

1.34. **Mi a döntési algoritmus vagy levezető eljárás? Mi lehet ezek megállási feltétele?** Egy olyan algoritmus, amely adott bemenő adatokkal dolgozik, azokat a megfelelő szabályok szerint használja fel és a levezetési szabály szerint alakítja át. Akkor áll meg, amikor a kitűzött célt (a megállási feltételt) elérte.

1.35. **Mit értünk két klóz rezolvensén az ítéletlogikában? Mutassa be egy példán is!** Legyenek C_1, C_2 olyan klózok, amelyek pontosan egy komplemens literálpárt tartalmaznak: $C_1 = A \vee B$; $C_2 = A \vee \neg B$. Ekkor létezik rezolvensük: $res(C_1, C_2) = A$.

1.36. **Jelöljön S ítéletlogikai klózok egy halmazát. Definiálja az S klózhalmazból való rezolúciós levezetés fogalmát. Mi itt a megállási feltétel (a levezetés célja)?** S klózhalmazból való rezolúciós levezetés egy olyan véges $k_1, k_2, ..., k_n$ klózsorozat, ahol $\forall j = 1, 2, ..., n$-re:

(1) vagy $k_1 \in \mathcal{K}$
(2) vagy van olyan $1 \leq s; t \leq j$, hogy k_j a k_s, k_t klózpár rezolvense.

A megállási feltétel az üres klóz levezetése.

1.37. **Jelöljön S ítéletlogikai klózok egy halmazát. Definiálja az S klózhalmazból való lineáris rezolúciós levezetés fogalmát!** Egy S klózhalmazból való lineáris rezolúciós levezetés egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, ..., k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 2, 3, ..., m$-re k_j a (k_{j-1}, l_{j-1}) klózpár rezolvense.

1.38. **Mit értünk Horn klóz alatt és mi a Horn formula?** Egy klózt Horn klóznak nevezünk, ha legfeljebb egy literálja nem negált.

1.39. **Mit értünk két alapklóz rezolvensén az elsőrendű logikában? Mutassa be egy példán is!** Rögzítsünk egy U univerzumot. Legyenek K_1 és K_2 az U univerzum feletti egyszerű alapklózok. Azt mondjuk, hogy K_1 és K_2 alapklózoknak van rezolvense, ha bennük pontosan egy komplemens alapliterálpár van, azaz $K_1 = K_1' \vee L_1$, $K_2 = K_2' \vee L_2$ és $L_1 = \neg L_2$. A rezolvens: a $K_1' \vee K_2'$ alapklóz.

1.40. **Jelöljön S elsőrendűlogikai alapklózok egy halmazát. Definiálja az S klózhalmazból való rezolúciós levezetés fogalmát. Mi itt a megállási feltétel (a levezetés célja)?**

1.41. **Mi a prenex formula és milyen részei vannak? Irjon fel egy példát.** Jelöljön Q bármely kvantort. A $Qx_1Qx_2...Qx_nB$ formula egy prenex formula. $Qx_1Qx_2...Qx_n$ a prefixum és B a formula törzse, mátrixa. B kvantormentes formula. *Példa:* $\forall x \exists y \left(P\left(x\right) \wedge R\left(y\right)\right)$.

1.42. **Mi a Skolem formula és milyen részei vannak? Írjon fel egy példát!** Az olyan prenexformula, aminek a prefixumában csak univerzális kvantor szerepel. *Példa:* $\forall x \forall y \left(P\left(x\right) \wedge R\left(y\right)\right)$.

1.43. **Definiálja az elsőrendű klóz fogalmát és irjon fel egy példát.** Egy olyan zárt Skolem formula, aminek magja különböző alapú elsőrendű nyelvi literálok (atomi formula, illetve annak negáltja) diszjunkciója. *Példa:*

$$\forall x \forall y \forall z \left(P\left(x\right) \vee \neg Q\left(x, f\left(y\right)\right) \vee P\left(g\left(z\right)\right)\right)$$

1.44. **Mit értünk literál alatt az ítéletlogikában és az elsőrendűlogikában? Illusztrálja példával is.** Egy prímformulát (ítéletváltozót) vagy annak negáltját közös néven literálnak nevezzük. Az elsőrendű literál egy atomi formula, vag egy negált atomi formula. *Például:* $P\left(x_1, x_2, ..., x_j\right), \neg P\left(x_1, x_2, ..., x_j\right)$.

1.45. **Jelöljön S elsőrendűlogikai klózok egy halmazát. Definiálja egy S klózhalmaz Herbrand univerzumát!** Herbrand univerzum (H) egy adott elsőrendű nyelv összes alaptermjei halmaza.

1.46. **Mik egy elsőrendű klózhoz tartozó alapklózok ? Irjon fel egy példát.** Alapklóz elsőrendű literálok alappéldányainak a diszjunkciója.

1.47. **Mi a Herbrand bázis?** Herbrand bázis a H Herbrand univerzum feletti alapatomok egy sorozata.

1.48. **Mi egy elsőrendű nyelvhez és egy adott univerzumhoz tartozó szemantikus fa?** Egy egy adott univerzumon, egy adott elsőrendű nyelv predikátumszimbólumait interpretáló összes struktúrát megadó bináris fa, ahol:

- Bázis az összes alapatomok egy sorozata
- Egy ág egy interpretációt ad meg.

1.49. **Sorolja fel az ítéletlogikai bizonyításelmélet axiómáit, adja meg a levezetési szabályt.**

(1) $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$
(2) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$
(3) $(\neg X \rightarrow Y) \rightarrow ((\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow X)$

Az ítéletkalkulus három axiómasémája alapján helyettesítéssel kapjuk az axióma formulákat. Levezetési szabály: Az ítéletkalkulus levezetési szabálya – a modus ponens vagy leválasztási szabály – a helyes következtetési formához kötődik. $\{X \rightarrow Y, X\} \vdash_0 Y$.

1.50. **Adott ítéletlogikai formulák egy F halmaza és egy formula A. Definiálja mit jelent A-nak bizonyításelméleti levezetése F-ből.** Az F formulahalmazból az A formula ítéletkalkulusbeli levezetése egy olyan $D_1, D_2, ..., D_m$ $(m \geq 1)$ formulasorozat, ahol minden $j = 1, 2, ..., m$-re D_j

(1) vagy eleme az F formulahalmaznak, azaz ún. feltételformula vagy hipotézis,
(2) vagy valamelyik axiómasémából formulabehelyettesítéssel állt elő, azaz axiómaformula,
(3) vagy olyan $1 \leq s,\ t < j$, hogy a D_s és a D_t formulákból levezetési szabállyal állt elő,

és a formulasorozat utolsó tagja, D_m éppen az A formula.

1.51. **Mit jelent, hogy az A formula levezethető F-ből bizonyításelméleti levezetéssel?** A formula az F formulahalmazból levezethető, ha A-nak van az F formulahalmazból levezetése. Jelölése: $F \vdash_0 A$, amit röviden szekvenciának nevezünk.

1.52. **Mit jelent az hogy egy A formula bizonyítható?** Egy A formula bizonyítható az ítéletkalkulusban, ha van hipotézismentes levezetése (azaz levezethető az üres feltételformula halmazból). Ebben az esetben a $\vdash_0 A$ jelölést használjuk.