Feladatok

2002. szeptember 25.

1. Halmazok

1.1. Legalább, illetve legfeljebb hány eleme van egy m elemű és egy n elemű halmaz

– metszetének – egyesítésének
– Descartes szorzatának – különbségének?

1.2. Írjuk fel az $A \times B$, $A \times C$, $C \times B$, $(A \times B) \times C$, és $A \times B \times C$ halmazok elemeit, ha $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{p, q\}$!

1.3. Bizonyítsd be, hogy $H \subseteq A \times B$ esetén

- $(\forall (a, b), (c, d) \in H : \ (a, d) \in H) \Leftrightarrow (\exists K \subseteq A : \ \exists L \subseteq B : \ H = K \times L)$
- ha H nem üres, akkor K és L egyértelmű.

2. Relációk

2.1. Az $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}$.

a) Mi a reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?

b) Determinisztikus-e, ill. függvény-e a reláció?

c) Mi R 0., 2., (-1). hatványa?

d) Mi a $\{4, 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

e) Hány eleme van R értékkészlete hatványhalmazának?

2.2. Milyen összefüggés van egy H halmaz R reláció szerinti inverz képe és ősképe között? És ha R függvény?

2.3. a) $R \subseteq A \times A$. Mivel egyenlő $R^{-1}(A)$?
b) Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz inverz képének képe, és a H halmaz között?
c) Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz ősképe képe és a H halmaz között?

2.4. a) $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?
b) $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), (x - y, y)) | x, y \in \mathbb{N}\}$.
Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

2.5. $R = \{((x, y), (f(x, y), y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$, ahol $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz ősképe ill. inverz képe?

2.6. $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B$. Van-e valamilyen összefüggés az $R^{-1}(B \setminus Q)$ halmaz és az $A \setminus (R^{-1}(Q))$ halmaz között?

2.7. Készíts olyan nem üres relációt, amelyre igaz, hogy értékkészlete minden valódi részhalmazának ősképe üres halmaz!

2.8. $R \subseteq A \times B, P, Q \subseteq B$. Hogyan lehetne jellemezni az $R^{-1}(P \cup Q)$ és az $R^{-1}(P \cap Q)$ halmazt az $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ halmaz segítségével?

2.9. Legyen $F, G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, Y = \{1, 2\}$. $F = \{(a, b) \mid \ b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$.
$G = \{(a, b) \mid 2|a \wedge a = 2 * b\}$.

$$\begin{array}{ll} G \circ F = ? & G \odot F = ? \\ F^{(-1)} \circ G^{(-1)} = ? & F^{-1} \circ G^{-1}(Y) = ? \\ (G \circ F)^{-1}(Y) = ? & (G \circ F)^{(-1)} = ? \end{array}$$

2.10. $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

a) $(G \circ F)^{(-1)} = F^{(-1)} \circ G^{(-1)}$

b) $\forall Y \subseteq C : \ (G \circ F)^{-1}(Y) = F^{-1} \circ G^{-1}(Y)$

c) $(G \odot F)^{(-1)} = F^{(-1)} \odot G^{(-1)}$

d) $\forall Y \subseteq C : \ (G \odot F)^{-1}(Y) = F^{-1}(G^{-1}(Y))$

Igazak-e az a)–d) állítások, ha G vagy F függvény?

2.11. Mi az összefüggés két reláció kompozíciójának értelmezési tartománya és ugyanezen két reláció szigorú értelemben vett kompozíciójának értelmezési tartománya között?

2.12. Legyen R a 2.1. feladatban adott reláció. $f \subseteq A \times \mathbb{L}$. $f = \{(1, i), (2, i), (3, i), (4, h), (5, i)\}$. Mi f, ill. $(f \circ R)$ igazsághalmaza?

2.13. Készíts olyan nem üres R relációt és f logikai függvényt, hogy $f \circ R$ igazsághalmaza üres legyen!

2.14. $R, Q \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R \odot Q)^{(-1)} = Q^{(-1)} \circ R^{(-1)}$?

2.15. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$?

2.16. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $\forall H \subseteq A : \ R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$?

2.17. $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $Q = \{(a, b) \mid 2|a \wedge b|a \wedge \ prim(b)\}$.

a) $P = \{(a, b) \mid b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$

b) $P = \{(a, b) \mid b|a\}$

Add meg a $Q^{(-1)}, Q \circ P$ és $Q \odot P$-t relációt!

2.18. $H \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, F \subseteq C \times D$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $a \in \mathcal{D}_{(G \circ H)} \cap \mathcal{D}_{(G \odot H)}$, akkor $G \circ H(a) = G \odot H(a)$.

b) $\mathcal{D}_{(G \odot H)} \subseteq \mathcal{D}_{(G \circ H)}$.

c) $(\forall a \in \mathcal{D}_H \mid |H(a)| = 1) \Rightarrow G \circ H = G \odot H$.

d) $\mathcal{D}_G = B \Rightarrow G \circ H = G \odot H$.

e) Asszociativitás:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

$$(F \odot G) \odot H = F \odot (G \odot H)$$

f) $Q, R, S \subseteq A \times A$. $Q \circ R \subseteq S \iff Q^{(-1)} \circ \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R}$

g) $Q, R, S \subseteq A \times A$. $Q \odot R \subseteq S \iff Q^{(-1)} \odot \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R}$

h) $R \neq \emptyset \Rightarrow L \odot R \odot L = L$, ahol $L = A \times A$

i) Monotonitás:

$$R \subseteq S \Rightarrow R \circ Q \subseteq S \circ Q$$

$$R \subseteq S \Rightarrow Q \odot R \subseteq Q \odot S$$

2.19. Legyen R és Q két reláció a természetes számok halmazán! R egy természetes számhoz rendeli önmagát és a kétszeresét, Q egy páros természetes számhoz a felét.

a) Írd fel a két relációt, és add meg az értelmezési tartományukat!

b) Írd fel az R reláció k. hatványát ($k \geq 1$) és ennek az értelmezési tartományát!

c) Írd fel a $Q \circ R$ relációt és az értelmezési tartományát!

d) $F = Q \odot R$! Írd fel az F relációt és az értelmezési tartományát!

2.20. $F \subseteq A \times B$, $G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy:

a) $\mathcal{D}_{(G \odot F)} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$

b) $\mathcal{D}_{(G \circ F)} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$

3. Reláció lezártja

3.1. $R \subseteq \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$. $R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(3,3),(3,5),(4,5)\}$. Mi lesz R lezártja és korlátos lezártja?

3.2. $P \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. $P = \{(a,b) \mid \; b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$. Mi lesz P lezártja?

3.3. Mutassunk példát olyan relációra, aminek lezártja és korlátos lezártja különböző!

3.4. $P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$P(a) = \begin{cases} \{a-1\}, & \text{ha } a > 0 \\ \{b | b \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

Mi P lezártja és korlátos lezártja?

3.5. $A = \{1,2,3,4,5\}, R \subseteq A \times A$. $R = \{(1,2),(1,5),(2,5),(3,2),(3,4),(5,2)\}$.
$\lceil \pi \rceil = \{1,2,3,4\}$. Írjuk fel a reláció feltételre vonatkozó lezártját!

3.6. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $R = \{(a,b) \mid \; b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$. $\lceil \pi \rceil = \{x \mid x \text{ kettőhatvány }\}$. Írjuk fel az $R|_\pi$ relációt, lezártját és korlátos lezártját!

3.7. Adjunk példát olyan nem üres relációra, amelynek lezártja üres halmaz és van olyan π feltétel, hogy a reláció feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya megegyezik az eredeti reláció értelmezési tartományával!

3.8. $R \subseteq A \times A$. Tegyük fel, hogy az R értelmezési tartománya egyenlő az R értelmezési tartományának R-re vonatkozó ősképével. Mit mondhatunk R lezártjáról?

3.9. Van-e olyan nem üres reláció és π feltétel, hogy a reláció lezártja üres halmaz, és a π feltételre vonatkozó lezártja azonos a relációval?

3.10. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-2\}, & \text{ha } a > 1 \\ \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

3.11. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-3\}, & \text{ha } a > 2 \\ \{3 * k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

3.12. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Az R reláció minden összetett számhoz a legnagyobb valódi osztóját rendeli. Legyen q

a) egy rögzített összetett természetes szám!

b) egy rögzített prímszám!

Legyen $P_q(a) = (\exists k \in \mathbb{N} \mid a = q^k)$! Mi lesz az R reláció P_q feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya?

3.13. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(x) = \begin{cases} \{b \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : b = 2 * k + 1\}, & \text{ha } x \neq 0 \wedge x \text{ páros} \\ \{x - 7\}, & \text{ha } x \geq 7 \wedge x \text{ páratlan} \\ \{0\}, & \text{ha } x = 1 \\ \{7\}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Mi lesz R lezártja és korlátos lezártja?

3.14. R legyen a 3.11. feladatban adott reláció. $\pi(k) = (k \text{ páratlan szám})$. Add meg az $R|_\pi$ relációt, lezártját és korlátos lezártját!

3.15. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $a \in \mathcal{D}_{\overline{R}} \cap \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}}$, akkor $\overline{R}(a) = \overline{\overline{R}}(a)$.

b) $\mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} \subseteq \mathcal{D}_{\overline{R}}$.

* c) Ha az A halmaz véges és $R \subseteq A \times A$, akkor $\overline{R} = \overline{\overline{R}}$.

** d) Ha A megszámlálhatóan végtelen, $R \subseteq A \times A$, és
$\forall a \in A : (\exists n(a) \in \mathbb{N}_0 : |R(a)| \leq n(a)) \Rightarrow \overline{R} = \overline{\overline{R}}$.

3.16. Legyen $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, R értelmezési tartománya $\mathbb{N}$!

$$R(x) = \begin{cases} \{b | b > 0 \wedge b < x \wedge 2|b\}, & \text{ha } x \text{ páratlan} \\ \{x - 1\}, & \text{ha } x \text{ páros} \end{cases}$$

$\pi(x) = (x \text{ páros természetes szám})$. Mi az R reláció π feltételre vonatkozó lezártja és korlátos lezártja?

4. Projekció, redukált

4.1. $W = N_1 \times N_2 \times N_3$. $\alpha \in W^{**}$, ahol $N_i = \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, 3)$. $\alpha_1 = (1, 1, 1)$. Az α sorozat további elemeit úgy kapjuk meg, hogy a pontok koordinátáit az első koordinátával kezdve ciklikusan 1-gyel növeljük. $\text{pr}_{N_1 \times N_3}(\text{red}(\alpha)) =?$

4.2. Legfeljebb ill. legalább milyen hosszú egy m és egy n hosszúságú sorozat redukáltjának konkatenációja, ill. konkatenációjának redukáltja?

4.3. Igaz-e, hogy egy α sorozat redukáltjának projekciója ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

4.4. Igaz-e, hogy egy α sorozat projekciójának redukáltja ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

4.5. Legyen $A = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$, $B = N_4 \times N_1$, ahol $\forall i \in [1, 4] : N_i = \mathbb{N}$.
$\alpha =< (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 4), (5, 2, 3, 4), (5, 7, 3, 4), (5, 7, 10, 4), \cdots >$.

a) $\text{pr}_B(\alpha) =?$

b) $\text{red}(\text{pr}_B(\alpha)) =?$

5. Feladat, program, programfüggvény, megoldás

5.1. $A_1 = \{1, 2\},\ A_2 = \{1, 2\},\ A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $A = A_1 \times A_2 \times A_3$.
$F = \{(a, b, c) \mid c = a + b\}$. Miért hibás az F feladat leírása?

5.2. $A_1 = \{1, 2\},\ A_2 = \{1, 2\},\ A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ A = A_1 \times A_2 \times A_3$.
$F = \{((a, b, c), (d, e, f)) \mid f = a+b\}$. $F(1, 1, 1) =?$ Hány olyan pontja van az állapottérnek, amelyekhez a feladat ugyanazokat a pontokat rendeli, mint $(1, 1, 1)$-hez?

5.3. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}, S \subseteq A \times A^{**}$.

$$S = \{ \begin{array}{llll} 1\to 1251 & 1\to 14352 & 1\to 132\dots & 2\to 21 \\ 2\to 24 & 3\to 3\dots & 4\to 41514 & 4\to 431251 \\ 4\to 41542 & 5\to 524 & 5\to 534 & 5\to 5234 \end{array} \}$$

$F = \{(2,1)\,(4,4)\,(4,1)\,(4,2)\,(4,5)\}$.

a) Adjuk meg $p(S)$-t!
b) Megoldja-e S a feladatot?

5.4. Legyen S program, F olyan feladat, hogy S megoldása F-nek. Igaz-e, hogy

a) ha F nem determinisztikus, akkor S sem az?
b) ha F determinisztikus, akkor S is az?
c) ha F nem determinisztikus, akkor $p(S)$ sem az?
d) ha $p(S)$ determinisztikus, akkor F is az?
e) ha F determinisztikus, akkor $p(S)$ is az?
f) ha S nem determinisztikus, akkor $p(S)$ sem az?

5.5. Igaz-e, hogy programok uniójának programfüggvénye megegyezik a programfüggvények uniójával?

5.6. Fejezzük ki a programok uniójának programfüggvényét a programok programfüggvényeivel!

5.7. $S \subseteq A \times A^{**}$. Igaz-e, hogy $p(S) = \{(a,b) \in A \times A \mid \exists \alpha \in A^* :\ (a,\alpha) \in S \wedge b = \tau(\alpha)\}$?

5.8. Legyen F_1 és F_2 egy–egy feladat ugyanazon az állapottéren! Igaz-e, ha minden program, ami megoldása F_1-nek, az megoldása F_2-nek is, és minden program, ami megoldása F_2-nek, az megoldása F_1-nek is, akkor F_1 és F_2 megegyeznek?

5.9. Igaz-e, hogy $p(S)$ értelmezési tartománya éppen A^* ősképe S-re nézve?

5.10. Mondhatjuk-e, hogy az S program megoldja az F feladatot, ha igaz a következő állítás: $q \in \mathcal{D}_F \Rightarrow S(q) \subseteq A^* \wedge p(S)(q) \subseteq F(q)$.

5.11. $F_1 \subseteq F_2$. Az S program megoldja F_2-t. Igaz-e, hogy S megoldja F_1-et is?

5.12. $S_1 \subseteq S_2$. S_2 megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy S_1 megoldja F-et?

5.13. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, F_1 = \{((u,v),(x,y)) \mid\ y|u\}$, $F_2 = \{((u,v),(x,y)) \mid x = u \wedge y|u\}$. Ekvivalens-e a két feladat? (Van-e valamilyen összefüggés közöttük?)

5.14. $F \subseteq A \times A$. S_1, S_2 programok A-n. Az S_1 és az S_2 is megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy az $S = (S_1 \cup S_2)$ program is megoldja az F feladatot?

5.15. Legyen F a 2.19.-es feladat d) pontjának relációja! $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{**}$.

$$\begin{aligned} S = & \{(a, < a \cdots >) \mid a \equiv 1 \mod (4)\} \\ & \cup\{(b, < b >), (b, < b, b/2 >) \mid b \equiv 2 \mod (4)\} \\ & \cup\{(c, < c, 2*c >) \mid c \equiv 3 \mod (4)\} \\ & \cup\{(d, < d, d/2 >) \mid d \equiv 0 \mod (4)\} \end{aligned}$$

Add meg $p(S)$ értelmezési tartományát! Megoldja-e S az F feladatot?

5.16. Tekintsük a következő szövegesen megadott feladatot: Adott egy sakktábla, és két rajta lévő bástya helyzete. Helyezzünk el a táblán egy harmadik bástyát úgy, hogy az mindkettőnek az ütésében álljon! Készítsük el a modellt: írjuk fel az állapotteret és az F relációt!

5.17. Tudjuk, hogy S megoldja F-et (az A állapottéren). Igaz-e, hogy $(a \in A \wedge (S(a) \not\subseteq A^* \vee p(S)(a) \not\subseteq F(a))) \Rightarrow a \notin \mathcal{D}_F$?

5.18. Legyen $F \subseteq A \times A$ egy feladat és $S \subseteq A \times A^{**}$ egy program. Jelöljük FP-vel azt a relációt, amely F és $p(S)$ metszeteként áll elő. Igaz-e, hogy

a) ha $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$, akkor S megoldja F-et?
b) ha S megoldja F-et, akkor $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$?

6. Feladat és program kiterjesztése

6.1. a) $B = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}, A = \{1,2,3\}$. $F \subseteq A \times A$. $F = \{(1,2),(1,3)\}$. Mi az F kiterjesztettje $B \times B$-re?
b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $F \subseteq A \times A . F = \{(q, q+1) \mid q \in \mathbb{N}\}$.
Mi az F kiterjesztettje B-re?
c) Adott az $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ állapottéren az $F = \{((l,k),(l',k')) \mid k' = (l \wedge k)\}$ feladat, és az $A' = \mathbb{L} \times \mathbb{L} \times V$ állapottéren ($V = \{1,2\}$) a következő program:

$$
\begin{array}{llll}
S = \{ & ii1 \rightarrow ii1, ih2, hi2 & ii2 \rightarrow ii2, hh1, ii1 & \\
& ii2 \rightarrow ii2, ih2, hi1, hi2 & ih1 \rightarrow ih1 & \\
& ih2 \rightarrow ih2, ii1, hh1 & hi1 \rightarrow hi1, hh2 & \\
& hi2 \rightarrow hi2, hi1, ih1 & hi2 \rightarrow hi2, hh1, hh2 & \\
& hh1 \rightarrow hh1, ih1 & hh2 \rightarrow hh2 & \}
\end{array}
$$

Megoldja-e S az F A'-re való kiterjesztettjét?

6.2. $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Mondjunk példát olyan programra, amelynek egyetlen valódi altérre vett projekciója sem program. $(A_k = \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n)$.

6.3. Igaz-e?

a) ha $F = \mathrm{pr}_A(F'')$, akkor F'' az F kiterjesztettje?

b) $F' = \mathrm{pr}_A^{(-1)}(F)$? ill. $F' = \mathrm{pr}_A^{-1}(F)$?

6.4. Legyen $F \subseteq A \times A$, $F' \subseteq B \times B$, $F'' \subseteq C \times C$, $F''' \subseteq D \times D$, ahol $B = A \times A_1$, $C = A \times A_2, D = A \times A_1 \times A_2$, és legyen F', F'', F''' az F kiterjesztése rendre $B \times B, C \times C, D \times D$-re. Igaz-e, hogy F''' az F'' kiterjesztése $D \times D$-re? Add meg az F' és az F'' közötti kapcsolatot a projekció és a kiterjesztés fogalmának segítségével!

6.5. Igaz-e, ha $S \subseteq B \times B^{**}$, A altere B-nek, akkor

a) $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}_A(p(S))} = \mathrm{pr}_A(\mathcal{D}_{p(S)})$?

b) S A-ra történő projekciójának kiterjesztése B-re azonos S-sel?

6.6. B és C altere A-nak. $F \subseteq A \times A, F_1 \subseteq B \times B, F_2 \subseteq C \times C$. F_1 az F projekciója B-re. F az F_2 kiterjesztése A-ra. Igaz-e, hogy az F_1 feladat A-ra való kiterjesztettjének C-re vett projekciója megegyezik F_2-vel?

7. Vegyes feladatok

7.1. Keressük meg egy természetes szám egy osztóját!
$A = \mathbb{N}, F = \{(u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid v$ osztója u-nak$\}$.
$S_1 = \{(a, < a, 1 >) \in A \times a^{**} \mid a > 1\} \cup \{(1, < 1 >)\}$
$S_2 = \{(1, < 1 >), (2, < 2, 1, 2 >)\} \cup \{(a, \alpha) \in A \times A^{**} \mid \alpha_1 = a \wedge \tau(\alpha) = (a$ legkisebb 1-nél nagyobb osztója $)\}$.

a) Megoldja-e S_1 ill. S_2 a feladatot?

b) Ekvivalens-e S_1 és S_2?

7.2. Számítsuk ki a $(-1)^i$ függvény értékeinek összegét az $[m,n]$ intervallumon ($m, n \in \mathbb{N}$)!
$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, A_1 = A \times \mathbb{L}, F \subseteq A \times A, F'$ az F kiterjesztése $A_1 \times A_1$-re.
$S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}, S_3 \subseteq A_1 \times A_1^{**}$.
$F = \{((m,n,b),(m_1,n_1,b_1)) \mid b_1 = \sum_m^n (-1)^i \wedge m \leq n\}$.

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \{(m,n,x) \rightarrow ((m,n,x),(m,n,(-1)^m),(m,n,(-1)^m + (-1)^{m+1}),\ldots \\
& \ldots,(m,n,(-1)^m + \cdots + (-1)^n))\} \\
S_2 =& \{(m,n,x) \rightarrow ((m,n,x),(m,n,((-1)^m + (-1)^n)/2) \\
S_3 =& \{(m,n,x,l) \rightarrow ((m,n,x,l),(m,n,f(m,p(m) = p(n)),p(m) = p(n)))
\end{aligned}
$$

$$p(m)=\begin{cases}0, & \text{ha } m \text{ páros}\\ 1, & \text{különben}\end{cases} \qquad f(m,l)=\begin{cases}(-1)^m, & \text{ha } l\\ 0, & \text{különben}\end{cases}$$

a) Megoldja-e S_1 és S_2 F-et?

b) Megoldja-e S_3 F'-t?

c) Mely programok ekvivalensek A-n?

7.3. $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. $S \subseteq A\times A^{**}$.$S$ az (1,1,2) pontból kiindulva előállítja a 10. Fibonacci számot az $u(n)=u(n-1)+u(n-2)$ rekurzív összefüggés alapján. A koordináták rendre $u(n-2)$-nek, $u(n-1)$-nek, $u(n)$-nek felelnek meg. Írd fel azt a sorozatot, amelyet S az (1,1,2) ponthoz rendel! Mit rendel $p(S)$ az (1,1,2) ponthoz?

7.4. Számítsuk ki egy valós szám természetes kitevőjű hatványát!
$A = R\times\mathbb{N}_0\times R$, $F\subseteq A\times A$. $F=\{((x,n,k),(y,z,x^n)) \mid k=1\}$.
$S_1, S_2 \subseteq A\times A^{**}$

$$\begin{aligned}S_1((x,n,h)) =&\{<(x,n,h),(x,n-1,h*x),\dots,(x,0,h*x^n)>\}\\ S_2((x,n,h)) =&\{<(a_1),\dots,(a_m)> \mid (a_1)=(x,n,h)\wedge Legendre(a_m)=\emptyset\wedge\\ &\forall i\in(1,n]:\ (Legendre(a_{i-1})\neq\emptyset\wedge(a_i)\in Legendre(a_{i-1}))\}\end{aligned}$$

ahol $Legendre\subseteq A\times A$

$$Legendre(x,n,h)=\begin{cases}(x^2,n/2,h), & \text{ha } 2|n\wedge n\neq 0\\ (x,n-1,x*h), & \text{ha } \neg(2|n)\wedge n\neq 0\end{cases}$$

Megoldja-e S_1 ill. S_2 az F feladatot? Ekvivalensek-e A-n? Van-e olyan altere A-nak, ahol S_1 és S_2 ekvivalens?

8. Leggyengébb előfeltétel

8.1. Tekintsük az 5.4. feladatban adott programot! $\lceil R\rceil=\{1,2,5\}$. Írd fel az $\lceil \mathrm{lf}(S,R)\rceil$ halmazt!

8.2. Mivel egyenlő $\mathrm{lf}(S,\mathrm{igaz})$ ill. $\mathrm{lf}(S,\mathrm{hamis})$?

8.3. Igaz-e, ha $\forall i\in\mathbb{N}$: $Q(i)\Rightarrow Q(i+1)$, akkor

* $(\exists n\in\mathbb{N}:\ \mathrm{lf}(S,Q(n)))=\mathrm{lf}(S,(\exists n\in\mathbb{N}:\ Q(n)))$?

8.4. Igaz-e, hogy $\mathrm{lf}(S_1,R)=\mathrm{lf}(S_2,R)\iff \mathrm{lf}(S_1\cup S_2,R)=\mathrm{lf}(S_1,R)\vee\mathrm{lf}(S_2,R)$?

8.5. Igaz-e, ha $\forall y,x\in A:\ x\in\lceil\mathrm{lf}(S_1,P(\{y\}))\rceil\Leftrightarrow x\in\lceil\mathrm{lf}(S_2,P(\{y\}))\rceil$, akkor $\mathcal{D}_{p(S_1)}=\mathcal{D}_{p(S_2)}$? ($P(\{y\})$ az az állítás, amelynek igazsághalmaza $\{y\}$)

8.6. $\lceil H_1\rceil,\lceil H_2\rceil\subseteq A$. Igaz-e, ha minden $S\subseteq A\times A^{**}$ programra $\lceil\mathrm{lf}(S,H_1)\rceil=\lceil\mathrm{lf}(S,H_2)\rceil$, akkor $\lceil H_1\rceil=\lceil H_2\rceil$?

8.7. $S_1,S_2\subseteq A\times A^{**}$ programok. Igaz-e, ha $\forall\lceil H\rceil\subseteq A:\ \lceil\mathrm{lf}(S_1,H)\rceil=\lceil\mathrm{lf}(S_2,H)\rceil$, akkor S_1 ekvivalens S_2-vel?

8.8. Milyen összefüggés van $\mathrm{lf}(S,\mathrm{igaz}\wedge(\neg R))$ és $(\mathrm{igaz}\wedge(\neg\mathrm{lf}(S,R)))$ között?

8.9. Igaz-e, hogy $\lceil\mathrm{lf}(S,R)\rceil=p(S)^{-1}(\lceil R\rceil)$?

8.10. $A=\mathbb{N}$. Legyen S az 5.16. feladat programja! $H(x)=(x$ páros szám$)$. $\lceil\mathrm{lf}(S,H)\rceil=$?

9. Specifikáció tétele

9.1. Keressük meg egy természetes szám egy osztóját.

9.2. Keressük meg egy összetett természetes szám egy valódi osztóját.

9.3. Keressük meg egy természetes szám egy valódi osztóját.

9.4. Keressük meg egy természetes szám összes valódi osztóját.

9.5. Keressük meg egy természetes szám legnagyobb prímosztóját.

9.6. Állapítsuk meg, hogy hány valódi osztója van egy természetes számnak.

9.7. Keressük az $[m..n]$ intervallumban az első olyan számot, amelyiknek van valódi osztója.

9.8. Keressük az $[m..n]$ intervallumban azt a számot, amelyiknek a legtöbb valódi osztója van, de nem osztható 6-tal.

9.9. Az $[m..n]$ intervallumban melyik számnak van a legtöbb valódi osztója.

10. Típus

10.1. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció. $\mathbb{F} = \{F\}$.
$\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \S_1)$ és $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \S_2)$.
$\S_1 = \{S_1\}, \S_2 = \{S_2\}, \varrho_1 = \varrho_2, \lceil I_1 \rceil = \lceil I_2 \rceil$, és $S_2 \subseteq S_1$.
Igaz-e, ha $\mathcal{T}_1$ megfelel $\mathcal{T}_S$-nek, akkor $\mathcal{T}_2$ is?

10.2. Legyen $\mathcal{T}_{S_1} = (T_1, I_{S_1}, \mathbb{F}_1), \mathcal{T}_{S_2} = (T_2, I_{S_2}, \mathbb{F}_2)$ két típusspecifikáció!

1. állítás: Minden $\mathcal{T}$ típusra: $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{S_1}$-nek $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{S_2}$-nek .
2. állítás: $\lceil I_{S_1} \rceil = \lceil I_{S_2} \rceil$ és $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$.

Ekvivalens-e a két állítás?

10.3. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció. $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \S_1)$ és $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \S_2)$.

a) Legyen $\lceil I_1 \rceil = \lceil I_2 \rceil, \S_1 = \S_2$ és $\varrho_1(\lceil I_1 \rceil) = \varrho_2(\lceil I_2 \rceil)$ és $\forall \alpha \in E^* :\ \varrho_2(\alpha) \subseteq \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_S$-nek!
b) Legyen $\lceil I_2 \rceil \subseteq \lceil I_1 \rceil, \S_1 = \S_2$ és $\varrho_1(\lceil I_1 \rceil] = \varrho_2(\lceil I_2 \rceil]$, és $\forall \alpha \in E^* :\ \varrho_2(\alpha) = \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_S$-nek!

Igaz-e, hogy $\mathcal{T}_2$ is megfelel $\mathcal{T}_S$-nek?

10.4. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ a következő típusspecifikáció:
$I_S \equiv$ igaz$, T = \mathbb{N}_0, \mathbb{F} = \{F_1, F_2\}$.
F_1 specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{N}_0} \qquad B = \underset{x'}{\mathbb{N}_0} \qquad Q_{x'} = (x = x')$$

$$R_{x'} = (\exists z \in \mathbb{Z} :\ x' = 8 * z + x \wedge 0 \leq x < 8)$$

F_2 specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{N}_0} \times \underset{y}{\mathbb{N}_0} \times \underset{l}{\mathbb{L}} \qquad B = \underset{x'}{\mathbb{N}_0} \times \underset{y'}{\mathbb{N}_0}$$

$$Q_{x',y'} = (x = x' \wedge y = y')$$

$$R_{x',y'} = (l = (x' = y') \wedge x = x' \wedge y = y')$$

$\mathcal{T} = (\varrho, I, \S), E = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \forall e \in E^* : \ \varrho(e) = \sum_{i=1}^{|e|}(e_i * 8^{|e|})$

a) $I(e) = (|e| \geq 1 \land (e_1 = 0 \to |e| = 1))$

b) $I(e) = (|e| \geq 1)$

$S_1 \subseteq (E^*) \times (E^*)^{**}$

$$\forall e \in E^* : \ S_1(e) = \{\alpha \in (E^*)^* \mid \ |\alpha| = |e| \land \forall i \in [1, |\alpha|] : \ |\alpha_i| = |\alpha| - i + 1 \land \\ \forall i \in [2, |\alpha|] : \ \forall j \in [1, |\alpha_i|] \alpha_{i_j} = \alpha_{i-1_{j+1}})\}$$

$S_2 \subseteq (E^* \times E^* \times \mathbb{L}) \times (E^* \times E^* \times \mathbb{L})^{**}$
$\forall e, d \in E^* : \ \forall l \in \mathbb{L}$

$$S_2(e,d,l) = \{\beta \in (E^*)^* \mid \ |\beta| = \min(|e|, |d|) + 1 \land \forall i \in [2, |\beta|] : \ \beta_i = (ee, dd, ll) \land \\ ll = (\forall j \in [1, i-1] : \ ee_j = dd_j) \land |ee| = i - 1 \land |dd| = i - 1) \land \\ \forall j \in [1, i-1] : \ (ee_{i-j} = e_{|e|-j+1} \land dd_{i-j} = d_{|d|-j+1}))\}$$

Írd le szavakkal az F_1, F_2 feladatot, a ϱ relációt, és az S_1, S_2 programfüggvényét! Megfelel-e a típus a specifikációnak az a) ill. a b) esetben?

10.5. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, és adjuk meg a típusműveleteket megvalósító programok elő- és utófeltételeit (a típusspecifikáció tétele szerint) a következő típusra: a lehetséges értékek: $[0, 99999]$. A műveletek a következő és az előző 100000 szerinti maradékkal. Az elemi értékek a decimális számjegyek $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Mutasd meg, hogy a típus megfelel a típusspecifikációnak!

10.6. A típusértékek halmaza legyen a magyar abc magánhangzói! { a, á, e, é, i, í, o, ó, ö, ő, u, ú, ü, ű }. Szeretnénk tudni, hogy egy adott magánhangzónak melyik a (rövid ill. hosszú) párja. Legyen egy olyan típusműveletünk, amely erre a kérdésre választ tud adni. Az elemi típusértékek halmaza legyen a $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$ halmaz! Add meg a típusspecifikációt és készíts el egy olyan típust (add meg a típusműveleteket megvalósító programok elő- és utófeltételeit a típusspecifikáció tétele szerint), ami megfelel a specifikációnak!

10.7. Specifikáld azt a típust, melynek értékei egy 128 elemű halmaz részhalmazai, típusműveletei pedig két rész halmaz metszetének ill. uniójának képzése, ill. annak megállapítása, hogy egy elem eleme-e egy részhalmaznak. Adj meg egy reprezentációs függvényt, típust, amely megfelel a specifikációnak! (Az elemi típus a bit típus.)

10.8. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak)! A típusértékek: a síkvektorok halmaza, a műveletek: két vektor összeadása, valamint annak eldöntése, hogy két vektor számszorosa-e egymásnak.

10.9. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak)! A típusértékek a térvektorok halmaza, a műveletek: két vektor kivonása, valamint egy vektornak egy számmal való szorzása.

10.10. Adj típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak) a komplex számok típusára, ahol a műveletek két komplex szám összeadása és egy komplex szám képzetes részének meghatározása.

10.11. Adj típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak) a komplex számok típusára, ahol a műveletek két komplex szám összeszorzása és egy komplex szám n-dik ($n \in \mathcal{N}$) hatványának meghatározása.

10.12. Adj típusspecifiációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek a körlemezek halmaza, a műveletek: egy körlemez eltolása, és annak eldöntése, hogy egy síkbeli pont rajta van-e a körlemezen.

10.13. Adj típusspecifiációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek a gömbök halmaza, a műveletek: egy gömb eltolása, és annak eldöntése, hogy egy térbeli pont benne van-e a gömbben.

10.14. Adj típusspecifiációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek a négyzetek halmaza, a műveletek: egy négyzet eltolása, egy négyzet méteténék megvátoztatása, egy négyzet területének kiszámítása és annak eldöntése, hogy egy síkbeli pont rajta van-e a négyzeten.

10.15. Adj típusspecifiációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek a kockák halmaza, a műveletek: egy kocka eltolása, egy kocka méteténék megvátoztatása, egy kocka térfogatának kiszámítása és annak eldöntése, hogy egy térbeli pont benne van-e a kockában.

11. Paramétertér, specifikáció

11.1. Adott az $A = V \times V \times \mathbb{L}$ állapottér ($V = \{1, 2, 3\}$) és a $B = V \times V$ paramétertér, továbbá az F_1 és F_2 feladatok.
$F_1 = \{((a_1, a_2, l), (b_1, b_2, k)) \mid k = (a_1 > a_2)\}$ F_2 specifikációja:

$$A = \underset{a_1}{V} \times \underset{a_2}{V} \times \underset{l}{\mathbb{L}} \qquad B = \underset{a_1'}{V} \times \underset{a_2'}{V}$$

$$Q = (a_1 = a_1' \wedge a_2 = a_2')$$

$$R = (Q_{a_1', a_2'} \wedge l = (a_1' > a_2'))$$

Azonosak-e az F_1 és F_2 feladatok!

11.2. $A = \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{Z}} \qquad B = \underset{x'}{\mathbb{Z}} \quad F_1, F_2 \subseteq A \times A$

$F_1 :\quad Q = (x = x')$
$\quad R = (Q_{x'} \wedge x = |y * y|)$.
$F_2 = \quad \{((a, b), (c, d)) \mid c = a \wedge |d| * d = c\}$.
Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

11.3. Írd le szövegesen az alábbi feladatot:
$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{l}{\mathbb{N}} \quad B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$ és adott egy $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény.

$$Q = (m = m' \wedge n = n')$$

$$R = (m = m' \wedge n = n' \wedge l = \sum_{i=m}^{n} (g(i)))$$

ahol $g : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ és

$$g(i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \forall j \in [m, n] : \ x(j) \le x(i) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

11.4. Specifikáljuk a következő feladatot:
$A = \mathbb{L} \times \mathbb{L}, \quad F \subseteq A \times A, F = \{((l, k), (l', k')) \mid k' = k \wedge l' = (l \wedge k)\}$

11.5. Igaz-e a specifikáció tételének megfordítása?

(Ha S megoldja F-et, akkor $\forall b \in B : \ Q_b \Rightarrow \text{lf}(S, R_b)$)

11.6. $A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{p}{\mathbb{Z}} \quad B = \underset{k'}{\mathbb{Z}}$
$Q_{k'} = (k = k' \wedge 0 < k)$
$R_{k'} = (k = k' \wedge prim(p) \wedge \forall i > 1 : \ prim(i) \Rightarrow |k - i| \ge |k - p|)$ ahol $prim(x) = (x$ prímszám). Mit rendel a fent specifikált feladat az $a = (10, 1)$ és a $b = (9, 5)$ pontokhoz? Fogalmazd meg szavakban a feladatot!

11.7. $A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}} \times \underset{z}{\mathbb{N}} \quad B = \underset{x'}{\mathbb{N}} \times \underset{y'}{\mathbb{N}} \quad F_1, F_2 \subseteq A \times A$ F_1 specifikációja:

$$Q_{x', y'} = (x = x' \wedge y = y')$$

$$R_{x', y'} = (x = x' \wedge y = y' \wedge x'|z \wedge y'|z \wedge \forall j \in \mathbb{N} : \ (x'|j \wedge y'|j) \Rightarrow z|j)$$

$$F_2 = \{((a,b,c),(d,e,f)) \mid a = d \wedge b = e \wedge f|a*b \wedge a|f \wedge b|f\}$$

Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

11.8. Adott egy $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény.
$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \quad B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$
$F_1, F_2 \subseteq A \times A$
F_1 specifikációja:

$$\begin{aligned} Q_{m',n'} =& (m = m' \wedge n = n') \\ R_{m',n'} =& (m = m' \wedge n = n' \wedge i \in [m,n] \wedge \forall j \in [m,i) :\ f(j) < f(i) \wedge \\ & \forall j \in [i,n] :\ f(j) \le f(i)) \end{aligned}$$

F_2 specifikációja:

$$\begin{aligned} Q_{m',n'} &= (m = m' \wedge n = n') \\ R_{m',n'} &= (i \in [m',n'] \wedge \forall j \in [m',n'] :\ f(j) \le f(i)). \end{aligned}$$

Azonos-e a két feladat?

11.9. Specifikáljuk a következő feladatot: $A = V \times \mathbb{N} \qquad V = \text{vekt}([1,n] : \{0,1\})$.

$F \subseteq A \times A$, $F = \{((v,s),(v',s')) \mid v' = v \wedge s' = \sum_{k=1}^{n} v(k)\}$

11.10. Írd le szövegesen az alábbi feladatot: $A = \underset{x}{V} \quad B = \underset{x'}{V} \qquad V = \text{vekt}([1,n] : \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} Q_{x'} &= (x = x') \\ R_{x'} &= (\forall i,j \in [1,n] :\ (i < j \Rightarrow x(i) \le x(j)) \wedge x \in \text{perm}(x')) \end{aligned}$$

ahol $\text{perm}(x')$ az x' vektor permutációinak a halmaza.

12. Elemi programok

12.1. $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}, C = A \times B$.
Legyen S program A-n, $S = \{1 \to <1>, 2 \to <2222\cdots>, 3 \to <31>\}$. Legyen S_1 az S kiterjesztése C-re, M pedig olyan program C-n, hogy M ekvivalens S-sel A-n.

a) elemi program-e S?

b) elemi program-e S_1 és biztosan elemi program-e M?

12.2. $A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}}$ Mi az $(x,y) := F(x,y),\ F = (F_1,F_2),\ F_1(x,y) = y,\ F_2(x,y) = x$, azaz az $F(p,q) = \{b \in A \mid x(b) = q \wedge y(b) = p\}$ értékadás és az $R = (x < y)$ utófeltétel leggyengébb előfeltétele?

13. Programkonstrukciók, levezetési szabályok

13.1. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $\lceil \pi_1 \rceil = \{1,2,3,4\}$. $\lceil \pi_2 \rceil = \{1,3,4,5\}$.

$$\begin{array}{lllll} S_1 = \{ & 1 \to 14 & 1 \to 12\ldots & 2 \to 2132 & 3 \to 36 & \\ & 4 \to 463 & 4 \to 451 & 5 \to 563 & 6 \to 612 & \} \\ S_2 = \{ & 1 \to 134 & 1 \to 121 & 2 \to 2132\ldots & 3 \to 36 & \\ & 4 \to 463 & 4 \to 451\ldots & 5 \to 5632 & 6 \to 61\ldots & \} \end{array}$$

Add meg az $(S_1;S_2)$, $IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$, $DO(\pi_1, S_1)$ programokat és a programfüggvényeiket!

13.2. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\lceil\pi_1\rceil = \{1,2,3,4\}$, $\lceil\pi_2\rceil = \{2,3,4\}$, $\lceil\pi_3\rceil = \{1,4,6\}$.

$$\begin{array}{llll l} S_1 = \{ & 1{\to}12\ldots & 2{\to}23 & 3{\to}3456 & \\ & 4{\to}463 & 5{\to}53 & 6{\to}62 & \} \\ S_2 = \{ & 1{\to}12 & 2{\to}24 & 3{\to}3\ldots & \\ & 4{\to}43 & 5{\to}5 & 6{\to}61 & \} \\ S_3 = \{ & 1{\to}12 & 2{\to}2\ldots & 3{\to}31 & \\ & 4{\to}432 & 5{\to}5\ldots & 6{\to}63\ldots & \} \end{array}$$

$IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2, \pi_3 : S_3) =?$ $\mathcal{D}_{p(IF)} =?$ $p(IF) =?$

13.3. Fejezzük ki a SKIP ill. az ABORT programot egy tetszőleges S program és a programkonstrukciók segítségével!

13.4. Legyen S_1 és S_2 egy-egy program az A állapottéren. Igaz-e, hogy $S_2 \circ \tau \circ S_1$ megegyezik $(S_1; S_2)$-vel?

13.5. $S = (S_1; S_2)$. Igaz-e, hogy

a) $\mathcal{D}_{p(S)} = \lceil \mathrm{lf}(S_1, P(\mathcal{D}_{p(S_2)}) \rceil$

b) tetszőleges R utófeltételre: $\mathrm{lf}((S_1; S_2), R) = \mathrm{lf}(S_1, \mathrm{lf}(S_2, R))$?

13.6. Van-e olyan program, ami felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

13.7. Igaz-e, hogy minden program felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

13.8. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. Igaz-e, hogy $\mathcal{D}_{p(IF)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (ection\pi_k \cap \mathcal{D}_{p(S_k)})$?

13.9. Legyen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ program A-n! $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Keressünk olyan π_k feltételeket és S_k programokat, hogy $\mathcal{D}_{p(IF)} = A$ és $\mathcal{D}_{p(S)} = \emptyset$!

13.10. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Igaz-e, hogy $p(IF)$ része $p(S)$-nek?

13.11. Igaz-e? Ha $IF = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$, akkor $\mathcal{D}_{p(IF)} = (\lceil\pi_1\rceil \cap \lceil\pi_2\rceil \cap \mathcal{D}_{p(S_1)} \cap \mathcal{D}_{p(S_2)}) \cup (\mathcal{D}_{p(S_1)} \cap (\lceil\pi_1\rceil \setminus \lceil\pi_2\rceil)) \cup (\mathcal{D}_{p(S_2)} \cap (\lceil\pi_2\rceil \setminus \lceil\pi_1\rceil))$?

13.12. $A = \{1,2,3,4\}$.

IF

$i = 1$	$i \le 2$
$i := 2 * i$	SKIP

Milyen sorozatokat rendel S_1, S_2, IF az állapottér egyes pontjaihoz?

13.13. $S = (S_1; S_2)$. S_1 megoldja F_1-et és S_2 megoldja F_2-t. Megoldja-e S az

a) $F = F_2 \circ F_1$

b) $F = F_2 \odot F_1$ feladatot?

13.14. $S = (S_1; S_2)$. S megoldása az $(F_2 \odot F_1)$ feladatnak.
Megoldja-e S_1 az F_1-et ill. S_2 az F_2-t?

13.15. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1,n]:$ S_k megoldja az $F|_{\lceil\pi_k\rceil}$ feladatot.

a) IF megoldja-e az F feladatot?

b) IF megoldja-e az F feladatot, ha $\pi_1 \vee \pi_2 \vee \cdots \vee \pi_n =$ igaz?

c) IF megoldja-e az F feladatot, ha $\mathcal{D}_F \subseteq \lceil \pi_1 \vee \pi_2 \vee \cdots \vee \pi_n \rceil$?

13.16. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. IF megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy $\forall k \in [1, n]:\ S_k$ megoldja az $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$ feladatot?

13.17. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F_1, \ldots, F_k \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1, n]:\ S_k$ megoldja az F_k feladatot. Megoldja-e IF az $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ feladatot?

13.18. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. IF megoldja az F feladatot és $\lceil \pi_1 \rceil \cup \cdots \cup \lceil \pi_n \rceil \subseteq \mathcal{D}_F$. Igaz-e, hogy $\forall k \in [1, n]:\ S_k$ megoldja az $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$ feladatot.

13.19. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F_1, \ldots, F_n \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1, n]:\ \mathcal{D}_{F_k} \subseteq \lceil \pi_k \rceil$ és S_k megoldja az F_k feladatot. $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$. Megoldja-e IF az F feladatot?

13.20. Igaz-e, hogy $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$ és $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_1 \wedge \pi_2 : S_1 \cup S_2, \pi_2 : S_2)$

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

13.21. Legyen $IF_{34} = (\pi_3 : S_3, \pi_4 : S_4)$, $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : IF_{34})$, $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 \wedge \pi_3 : S_3, \pi_2 \wedge \pi_4 : S_4)$! Igaz-e, hogy IF_1 és IF_2

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

13.22. $F \subseteq A \times A$ feladat. S_0 program A-n. S_0 megoldja F-et. Megoldja-e a $DO(\pi, S_0)$ program az F feladat π-re vonatkozó lezártját?

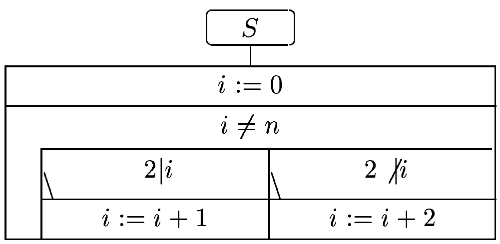
13.23. Legyen $DO = (\pi, S)$! Igaz-e, hogy

a) $p(DO) \subseteq p(S)$?

b) $p(S) \subseteq p(DO)$?

13.24. $A = \underset{i}{\mathbb{N}_0} \times \underset{n}{\mathbb{N}_0}$

$S = ((i := 0; DO(i \neq n, IF(\ 2|i :\ i := i + 1,\ \ 2 \not| i\ :\ \ i := i + 2))))$



Milyen sorozatokat rendel S a $(2, 4)$ ill. a $(3, 7)$ ponthoz?

13.25. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és Q igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres a

a) $\lceil P \wedge R \rceil$

b) $\lceil P \wedge \neg\pi \wedge R \rceil$ halmaz?

13.26. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és $(Q \wedge \pi)$ igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres a lf(S_0, P) és lf(DO, R) igazsághalmazának metszete?

13.27. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele. Legyen $g = p(S_0) \cap (\lceil \pi \rceil \times A)$ és $q \in \lceil P \rceil \cap \lceil \pi \rceil$. Igaz-e, hogy

a) $\forall k \in \mathbb{N}_0 :\ g^k(q) \subseteq \lceil P \rceil$

b) $b \in g^k(q) \cap \lceil \pi \rceil \cap \lceil P \rceil \Rightarrow t(b) \le t(q) - k$?

c) $g|_\pi = p(S_0)|_\pi$?

d) $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \; k \leq t(q) \land g^k(q) \subseteq \lceil \neg\pi \rceil$?

13.28. Legyen $S = (S_1; S_2)$ és Q, Q' és R olyan állítások, amelyekre
$Q \Rightarrow \text{lf}(S, R), Q' \Rightarrow \text{lf}(S_2, R), Q \Rightarrow \text{lf}(S_1, Q')$.
Lehetséges-e, hogy $\lceil Q \rceil \cap \lceil R \rceil = \emptyset \land \lceil Q \rceil \cap \lceil Q' \rceil \neq \emptyset \land \lceil Q' \rceil \cap \lceil R \rceil \neq \emptyset$? Indokold, ha nem, és írj rá példát, ha igen!

13.29. $A = \underset{z}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{N}_0} \quad B = \underset{z'}{\mathbb{Z}} \times \underset{y'}{\mathbb{N}_0}$

$Q = (x = x' \land y = y')$
$R = (x = x' - y' \land y = 0)$
$S_0 = \{((x, y), < (x, y), (x-1, y), (x-1, y-1) >) \mid x \in \mathbb{Z} y \in \mathbb{N}\} \cup$
$\{((x, 0), < (x, 0) >) \mid x \in \mathbb{Z}\}$
$DO = \{((x, y), < (x, y), (x-1, y), (x-1, y-1), (x-2, y-1),$
$(x-2, y-2), \ldots, (x-y+1, 1), (x-y, 1)(x-y, 0) >) \mid x \in \mathbb{Z} \land y \in N_0\}$

Megjegyzés: Az $(x, 0)$ párhoz 1 hosszúságú, az $(x, 1)$ párhoz 3 hosszúságú, az $(x, 2)$ párhoz 5 hosszúságú sorozatot rendel a program. Tudjuk, hogy $DO = (\pi; S_0)$ valamilyen π-re. Igaz-e, hogy található olyan P állítás és $t : A \to \mathbb{Z}$ függvény, hogy a ciklus levezetési szabályának feltételei teljesülnek, és ha igen, adj meg egy megfelelő π-t, P-t és t-t!

13.30. $A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{a}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \quad B = \underset{a'}{\mathbb{Z}} \times \underset{b'}{\mathbb{Z}}$

$S = (k := 5; ((a > b : x := a - b, a \leq b : x := b - a); i := i + 1))$
$Q_{a',b'} = (a = a' \land b = b' \land i \in [0, 1] \land |a - b| > 10)$
$R_{a',b'} = (a = a' \land b = b' \land k * i \leq x)$
Bizonyítsuk be, hogy $Q \Rightarrow \text{lf}(S, R)$!

14. Típuskonstrukciók

14.1. $T = \text{it}(T_0)$, $q \in T$, $e \in T_0$.

1. def.: $e \in q \Leftrightarrow \exists \alpha \in T_0^* : \; (q \in \psi_I(\alpha) \land \exists i \in [1, |\alpha|] : \; \alpha_i = e)$.
2. def.: $e \in q \Leftrightarrow \forall \alpha \in T_0^* : \; (q \in \psi_I(\alpha) \land \exists i \in [1, |\alpha|] : \; \alpha_i = e)$.

Ekvivalens-e a két definíció, ha az iterált kombináció, halmaz, sorozat, ill. általában?

14.2. $T = \text{it}(T_0)$, $t \in T$. Ekvivalens-e a következő két definició, ha az iterált halmaz, sorozat, ill. általában? Mit ad meg $f_1(t)$, $f_2(t)$?

1. def.: $f_1(t) = \max\limits_{(\alpha,t) \in \psi_I} (\bigcup\limits_{i=1}^{|\alpha|} \alpha_i)$
2. def.: $f_2(t) = \left| \bigcup\limits_{(\alpha,t) \in \psi_I} \left(\bigcup\limits_{i=1}^{|\alpha|} \alpha_i \right) \right|$