

VIZSGATEMATIKA
Bevezetés a matematikába
BSC B, C, T szak, I. évfolyam
2006/2007 őszi szemeszter

Jelölés: D: definíció,

T: tétel,

TB: tétel bizonyítással, az egyik vizsgakérdés a kiemelték közül várható.

A matematikai logika alapjai: az ítéletlogika, kijelentések és igazságértékük, kijelentések összekapcsolása, kijelentésformulák. T: az ítéletlogika tételei, T: az elsőrendű logika tételei, axiómák és a bizonyítások formái.

Halmazok, relációk, függvények: D: halmaz és elemei. D: halmazok egyenlősége. D: üres halmaz, D: részhalmaz. D: hatványhalmaz. Halmazműveletek. D: különbség, metszet, unió. T: az unió és a metszet tulajdonságai, De Morgan szabályok. D: osztályfelbontás. D: rendezett pár. D: Descartes-féle direkt szorzat. D: n-változós reláció, binér reláció, homogén reláció, D: reláció kiterjesztése, leszűkítése. D: homogén binér relációk tulajdonságai. D: ekvivalenciareláció, ekvivalenciaosztály. D: hányadoshalmaz, reprezentáns, teljes reprezentáns-rendszer. **TB: ekvivalenciareláció és osztályfelbontás kapcsolata.** D: relációk kompozíciója. TB: relációsorzat asszociatív. D: reláció inverze. D: függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet, kép, öskép. Függvények típusai. D: szürjektív, injektív, bijektív függvény. Speciális függvények: projekció, kanonikus függvény, identikus leképezés, permutációfüggvény, konstansfüggvény, karakterisztikus függvény. D: leszűkítés, kiterjesztés. D: Indexelt rendszerek, halmazcsalád. D: Függvények kompozíciója, inverze. TB: függvény inverze mikor függvény. D: n-változós függvény. Axiomatikus halmazelmélet: Zermelo axiómarendszere, a pótlás axiómája, ZFC.

Struktúrák: Rendezési struktúrák. D: részbenrendezés. D: szigorú részbenrendezés. D: diagonális reláció. TB: részbenrendezés és szigorú részbenrendezés kapcsolata. D: részbenrendezett struktúra. D: indukált részbenrendezés. D: minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elem. D: alsó korlát, felső korlát, alsó határ, felső határ. D: rendezési diagram. D: monoton, szigorúan monoton függvények. D: Hasse-diagram. D: zárt, nyílt intervallum. D: teljes rendezés, D: lánc. D: jólrendezés. T: jólrendezési tétel. **Algebrai struktúrák.** D: belső művelet, műveleti tábla. D: algebrai struktúra, Grupoidok. D: semleges elem. D: asszociatív struktúra. D: félcsoport, egységelemes félcsoport. D: inverz elem. D: csoport. D: Abel-csoport. Kétműveletes struktúrák. D: disztributivitás. D: gyűrű, nullelem, egységelem. D: kommutatív gyűrű. D: nullosztómentes gyűrű. D: integritási tartomány, zérógyűrű, nullgyűrű. D: test, ferdetest. D: külső műveletek. D: Ω -modulus. D: vektortér. **Vegyes struktúrák.** D: rendezett integritási tartomány. D: rendezett test. **Származtatott struktúrák.** Alstruktúra, szorzatstruktúra, faktorstruktúra. D: művelet összeférhetősége ekvivalenciarelációval. Lexikografikus rendezés. D: beágyazás. **Polinomok.** D: gyűrű feletti egyhatározatlanú polinom. D: polinom gyöke, zérushelye, foka. D: együtthatók, főegyüttható, főpolinom. **Mátrixok.** D: gyűrű feletti $m \times n$ -es mátrixok. D: mátrixok összege, szorzata, zérusmátrix, egységmátrix. T: egységelemes gyűrű feletti $m \times n$ -es mátrixok az összeadással és a szorzással egységelemes gyűrűt alkotnak.

A számfogalom felépítése. *Természetes számok.* D: Peano-axiómák. D: rákövetkezési reláció. T: rekurziótétel. Műveletek. D: összeadás. T: az összeadás asszociativitása, kommutativitása. D: szorzás. T: a szorzás szabályai, disztributivitás, asszociativitás, kommutativitás. D: a természetes számok rendezése. T: monotonia tételei, egyszerűsítési szabályok. D: sorozat, D: összeg, tag, szorzat, tényező. **TB: általános asszociativitás, kommutativitás.** T: általános disztributivitás. *Egészek.* D: egész számok konstrukciója. D: műveletek egész számokkal. **TB: az egészek integritási tartományt alkotnak.** D: egészek rendezése. T: számolási szabályok. T: az egészek rendezett integritási tartományt alkotnak. *Racionális számok.* D: konstrukció. D: műveletek racionális számokkal. **TB: a racionális számok testet alkotnak.** D: a racionális számok rendezése. T: a racionális számok rendezett testet alkotnak. *Valós számok.* D: felső határ tulajdonság. D: nyílt kezdőszelet, nyílt kezdet. D: irracionális számok. D: valós számok rendezése. T: műveletek valós számokkal, a műveletek tulajdonságai. T: a valós számok felső határ tulajdonságú rendezett testet alkotnak. D: abszolút érték, előjelfüggvény, alsó,-felső egészrész, törtrész. D: gyökvonás, logaritmuskeresés. *Komplex számok.* D: konstrukció. D: műveletek. Szemléltetésük. D: abszolút érték. D: konjugált. D: valós, képzetes rész. TB: műveletek komplex számokkal. D: argumentum. **TB: Moivre-azonosság.** D: komplex szám n -edik gyöke. D: n -edik egységgyökök. D: primitív n -edik egységgyökök. **TB: n -edik gyökök előállítás.** TB: n -edik egységgyökök összege. T: algebra alaptétele. A komplex számok rendezési tulajdonsága. TB: nem létezik olyan teljes rendezés, amellyel \mathbb{C} rendezett test lenne. *Algebrai, transzcendens számok.* D: \mathbb{Q} feletti algebrai szám, transzcendens szám. D: kvaterniók.

Halmazok számossága. D: azonos számosság. D: halmazok számossága, D: véges, végtelen halmaz. D: véges halmaz elemszáma. Műveletek számossággal. D: majorálás, szigorú majorálás. T: Schröder-Bernstein-tétel. D: megszámlálható, nem megszámlálható halmazok. TB: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálható. **TB: \mathbb{Q} megszámlálható. TB: megszámlálhatóan végtelen halmazok megszámlálhatóan végtelen családjának egyesítése megszámlálhatóan végtelen.** Példák. TB: Cantor-tétel. Cantor-féle átlós eljárás. **TB: a valós számok halmaza nem megszámlálható.** D: kontinuum számosság, példák. T: transzfinit indukció.

Kombinatorika. D: permutáció. TB: véges halmaz ismétlés nélküli permutációi száma. Stirling-formula, ciklikus permutálás. D: variáció. **TB: n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációi száma.** D: kombináció. TB: n elemű halmaz k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi száma. D: ismétléses variáció. TB: n elem k -ad osztályú ismétléses variációi száma. D: ismétléses kombináció. **TB: az ismétléses kombinációk száma.** D: ismétléses permutáció, **TB: az ismétléses permutációk száma.** TB: binomiális tétel és következményei. **TB: polinomiális tétel,** T: skatulya-elv, általános skatulya-elv, TB: logikai szita formula. Speciális számok. D: a Fibonacci-számok, **TB: a Fibonacci-sorozat n -edik tagja,** aranymetszés. D: szubfaktoriális, TB: a szubfaktoriális sorozat n -edik tagja. D: a Pascal-háromszög, TB: a binomiális együtthatók néhány tulajdonsága, becsléseik.

Elemi számelmélet. *Általános alapfogalmak.* D: osztó. TB: az oszthatóság tulajdonságai. D: egység. TB: egy szám és egységszerese oszthatósági tulajdonságai. D: asszociáltság. D: triviális osztók. D: felbonthatatlan szám. D: összetett szám. D: prímszám. TB: minden prím felbonthatatlan. D: legnagyobb közös osztó. D: relatív prímek. D: páronként relatív prímek. D: legkisebb közös többszörös. *Oszthatóság az egészek körében.* TB: az egészek körében két egység van. **TB: maradékos osztás. TB: számrendszerek. TB: legnagyobb közös osztó létezése.** TB: $c > 0$, akkor $(ca, cb) = c(a, b)$. TB: a legnagyobb közös osztó kifejezése a számok lineáris

kombinációiként. TB: lineáris diofantikus egyenletek megoldhatósága. TB: az euklideszi algoritmus lépésszáma, Lamé tétele. TB: $c|(a,b)$ és $(c,a) = 1$, akkor $c|b$. TB: egész szám pontosan akkor prím, ha felbonthatatlan. **TB: számelmélet alaptétele.** TB: a természetes számok kanonikus és módosított kanonikus alakja. TB: kanonikus alakban adott szám pozitív osztói, pozitív osztói száma. TB: legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös kifejezése a kanonikus alakok segítségével. TB: Legkisebb közös többszörös egyértelműsége. $(a,b)[a,b]=|ab|$. TB: $(ab,c)=1 \Leftrightarrow (a,c)=1$ és $(b,c)=1$. TB: a prímelek száma végtelen. TB: létezik tetszőleges hosszú csupa összetett számot tartalmazó intervallum. T: prímszámtétel. **TB: Erathosztenészi-szita.** T: Dirichlet-tétel, Goldbach-sejtés, Fermat és Mersenne-prímelek. D: kongruencia. TB: a kongruencia tulajdonságai. TB: kongruencia egyszerűsítése és ennek következménye. D: maradékosztály. TB: az osztályok elemei. D: teljes maradékrendszer. TB: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a,m) = (b,m)$. D: redukált maradékosztály, redukált maradékrendszer. D: Euler-féle φ függvény. T: teljes és redukált maradékrendszer tulajdonságai. **TB: teljes és redukált maradékrendszer lineáris transzformációi. TB: Euler-tétel.** TB: Fermat-tétel alakjai. Műveletek kongruenciákkal, TB: a modulo m maradékosztályok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak. D: multiplikatív inverz. TB: redukált maradékosztályok és multiplikatív inverz kapcsolata. T: modulo m maradékosztály pontosan akkor test, ha m prím. Lineáris kongruenciák. D: lineáris kongruencia megoldásszáma. **TB: az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia megoldhatósága és megoldásszáma.** TB: az $ax \equiv b \pmod{m}$ $(a,m)=1$ kongruencia megoldása. Szimultán kongruenciák. **TB: kínai maradéktétel és következménye.** Maradékrendszerek. Számelméleti függvények. D: additív, teljesen additív, multiplikatív és teljesen multiplikatív számelméleti függvények, példák. D: Möbius-függvény, **TB: Euler-féle φ -függvény multiplikatív.** $\varphi(n)$ alakja. Lánctörtek. Valós szám lánctörtbe fejtése. **TB: racionális szám lánctörtjei sorozatának végeessége.** D: a lánctört alak n -edik szelete.